

4.15. (2) Вычислить спектр сигнала $\xi(t) = a \frac{t}{t_0} \exp(-\frac{\pi t^2}{t_0^2})$. Представить графически сигнал $\xi(t)$ в зависимости от параметра t_0 , характеризующего его длительность, и спектр $S(\omega)$ сигнала в зависимости от параметра t_0^{-1} , характеризующего ширину его спектра. Проанализировать и построить в том же масштабе сигнал и спектр для импульсов при увеличении и уменьшении параметра t_0 в два и десять раз.

$$a = 10$$

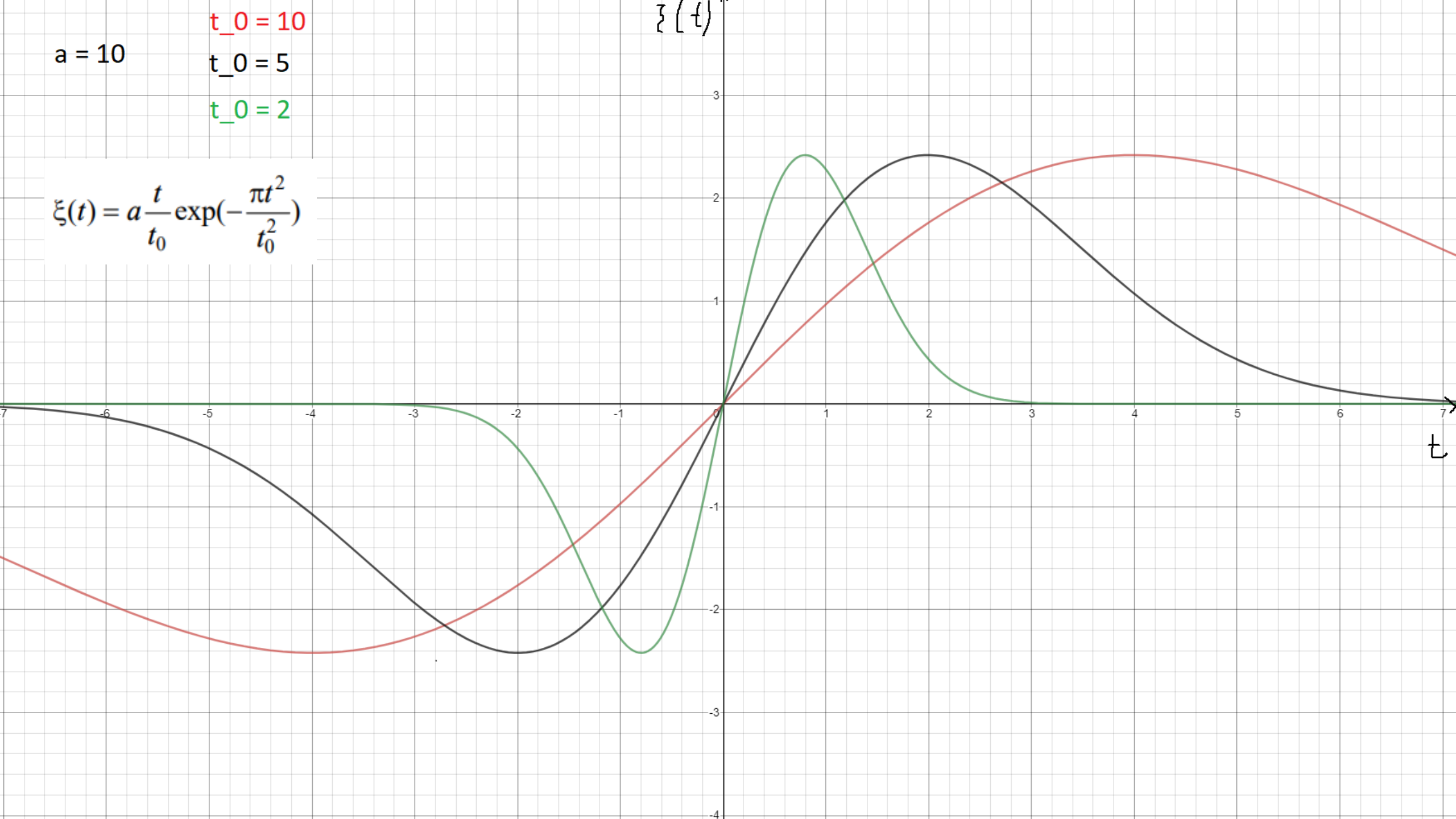
$$t_0 = 10$$

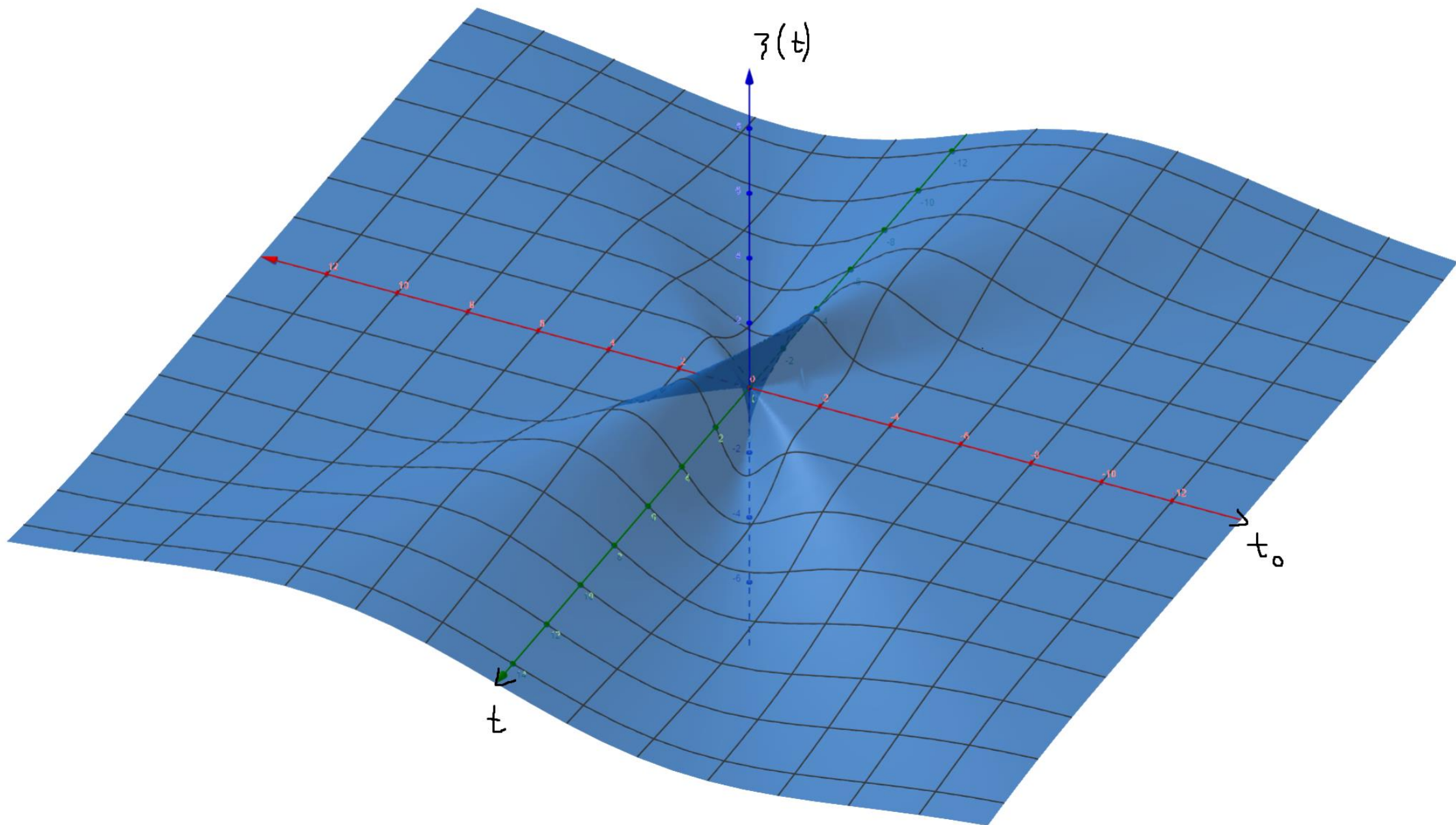
$$t_0 = 5$$

$$t_0 = 2$$

$$\xi(t) = a \frac{t}{t_0} \exp\left(-\frac{\pi t^2}{t_0^2}\right)$$

$$\xi(t)$$





Вычисление спектра сигнала ->

Сигнал

$$\xi(t) = a \frac{t}{t_0} \exp\left(-\frac{\pi t^2}{t_0^2}\right)$$

Спектр

$$|S(\omega)| = \omega \frac{a t_0}{4\pi^2} e^{-\frac{\omega^2 t_0^2}{4\pi}}$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} a \frac{t}{t_0} e^{-\pi \left(\frac{t}{t_0}\right)^2} e^{-i\omega t} dt \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \pi \frac{t^2}{t_0^2} + i\omega t = \left(\sqrt{\pi} \frac{t}{t_0} + \frac{i\omega t_0}{2\sqrt{\pi}} \right)^2 - \frac{\omega^2 t_0^2}{4\pi} \right\} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a t_0}{2\pi\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2 t_0^2}{4\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\pi} \frac{t}{t_0} e^{-\left(\sqrt{\pi} \frac{t}{t_0} + \frac{i\omega t_0}{2\sqrt{\pi}}\right)^2} d\left(\sqrt{\pi} \frac{t}{t_0} + \frac{i\omega t_0}{2\sqrt{\pi}}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a t_0}{2\sqrt{\pi}\pi\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2 t_0^2}{4\pi}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sqrt{\pi} \frac{t}{t_0} + \frac{i\omega t_0}{2\sqrt{\pi}}\right) e^{-\left(\sqrt{\pi} \frac{t}{t_0} + \frac{i\omega t_0}{2\sqrt{\pi}}\right)^2} d\left(\sqrt{\pi} \frac{t}{t_0} + \frac{i\omega t_0}{2\sqrt{\pi}}\right) \right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{i\omega t_0}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{\pi} \frac{t}{t_0} + \frac{i\omega t_0}{2\sqrt{\pi}}\right)^2} d\left(\sqrt{\pi} \frac{t}{t_0} + \frac{i\omega t_0}{2\sqrt{\pi}}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx = 0 ; \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \right\} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{a t_0}{2\pi^2} e^{-\frac{\omega^2 t_0^2}{4\pi}} \frac{i\omega t_0}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = -\frac{i a t_0 \omega}{4\pi^2} e^{-\frac{\omega^2 t_0^2}{4\pi}}$$

